ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΑΞΙΩΜΑ ΓΙΑ ΤΗ ΜΟΥΣΙΚΗ ΣΥΜΦΩΝΙΑ

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης
Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής,
Διευθυντής Εργαστηρίου Μουσικής Ακουστικής τεχνολογίας,
Τμήματος Μουσικών Σπουδών Πανεπιστημίου Αθηνών.

1. Εισαγωγικά

Μοχθώντας επί μία τριακονταετία στον επιστημονικό στίβο, επεξέτεινα την ερευνητική, διδακτική και συγγραφική μου δραστηριότητα και στην αρχαία ελληνική γραμματεία, αφού ούτως ή άλλως, υπό το πρίσμα αυτής εξετάζονται οι μουσικές θεωρίες των επιφανών Ελλήνων φιλοσόφων, μαθηματικών και φυσικών.
Χρησιμοποιώντας τη Φυσική και τα Μαθηματικά σε αγαστή συνάρτηση με τη Μουσική, οδηγήθηκα στη σπουδή του μοναδικού «μουσικού» έργου του Ευκλείδου, την *Κατατομή Κανόνος* (του μονοχόρδου) (*section canonis*).

2. Ευκλείδειος κατατομή κανόνος

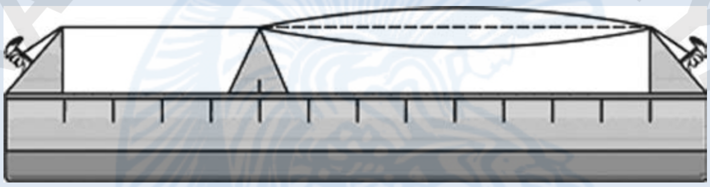
Ο Ευκλείδης (330 με 270 π.Χ.), υπήρξε μέγιστος Έλληνας διδάσκαλος των Μαθηματικών κατά τους Αλεξανδρινούς χρόνους. Η φήμη του, ως γεωμέτρου, διεδόθη παντού. Από τα μέσα ήδη της Ελληνιστικής εποχής, καθ΄ όλον τον μεσαίωνα αλλά και μέχρι των ημερών μας απανταχού της γης το όνομά του στη Δύση είναι ταυτόσημο με τη Γεωμετρία.

Η «κατατομή κανόνος», θα πρέπει να έχει γραφεί γύρω στο 300 π.Χ. Πρόκειται για μια πυθαγόρειο πραγματεία πάνω στη σχέση που συνδέει μαθηματικές και ακουστικές αλήθειες, αποτελώντας, έτσι, τη βάση για την ακουστική επιστήμη του Δυτικού κόσμου. Είναι γραμμένη με το ίδιο ύφος που είναι γραμμένα τα «Στοιχεία» του Ευκλείδου και γι’ αυτό αποδίδεται σ’ αυτόν.
Το πρώτο μεγάλο μέρος της Ευκλειδείου πραγματείας αντιμετωπίζεται ως μια ενιαία ολότητα, ως εισαγωγή. Στην εισαγωγή διατυπώνεται μια θεωρία για τη φυσική αιτία των ήχων και των μουσικών τους υψών έτσι σχεδιασμένη, ώστε να αιτιολογεί τη χρήση των μουσικών υψών ως σχετικών ποσοτήτων και των μεταξύ τους διαστημάτων ως αριθμητικών λόγων. Εν συνεχεία, με ένα επιχείρημα –το οποίο θα αποτελέσει το επίκεντρο της παρούσης εισηγήσεως- συσχετίζονται τα εύφωνα (σύμφωνα) διαστήματα με ορισμένους αριθμητικούς λόγους.

Ο συγγραφεύς της Ευκλειδείου πραγματείας, προκειμένου να αποδείξει συστηματικά και τυπικά τις προτάσεις, οι οποίες αποτελούν τη βάση της Πυθαγορείου και της Πλατωνικής παραδόσεως, βασίζεται κυρίως σε αποδεκτά γεγονότα της εμπειρικής παρατηρήσεως καθώς επίσης σε φυσικές και σε γενικής φύσεως θεωρήσεις. Έτσι, τα συμπεράσματά του δεν είναι καθαρά «ορθολογιστικά» και τα επιχειρήματά του δεν αναπληρώνουν τη μουσική εμπειρία, αλλά απλά αποτελούν μια προσπάθεια να μεταφράσουν τις αλήθειες αυτών των εμπειριών στη γλώσσα των Μαθηματικών, ώστε οι επαγωγές και οι αμοιβαίες σχέσεις να μπορούν να μελετηθούν σχολαστικά.

3. Πυθαγόρειος κανών ή μονόχορδο

Ο Πυθαγόρειος κανών ή μονόχορδο ήταν ένα όργανο-εργαλείο, που χρησίμευε στη μέτρηση, τις δοκιμές και την απόδειξη των αριθμητικών σχέσεων των μουσικών διαστημάτων. Η μακρόχρονη και επίπονη ενασχόληση του Πυθαγόρα με τη μουσική και τους πειραματισμούς του στο μονόχορδο έφερε ως αποτέλεσμα την υποταγή του κατ' εξοχήν φευγαλέου και ασύλληπτου μουσικού ήχου στον άτεγκτο νόμο των αριθμών.



Εικόνα 1. Το μονόχορδο για τη μελέτη των νόμων των χορδών.

Με τη χρήση του μονοχόρδου οι Πυθαγόρειοι κατάφεραν να μεταφέρουν την ακουστική εμπειρία, με τη βοήθεια της Γεωμετρίας, σε οπτική παρατήρηση, γεγονός εξαιρετικά σημαντικό, αφού η όραση είναι ο πιο αξιόπιστος μάρτυρας ανάμεσα στις αισθήσεις μας. Σχετικώς ο Αριστοτέλης στα Μετά τα φυσικά 985 b 31 (Bekker) αναφέρει: «τῶν ἁρμονιῶν ἐν ἀριθμοῖς ὁρῶντες τὰ πάθη καὶ τοὺς λόγους» [βλέποντας στους αριθμούς τις μεταβολές και τους λόγους των αρμονιών].

4. Σχετική ποσότητα (=λόγος) - Είδη μεγαλύτερης ανισότητος

Ό,τι μετρείται συγκρινόμενο με μια άλλη ποσότητα είναι είτε ίσο, είτε άνισο.
Ίσο είναι κάθε τι που, όταν συγκρίνεται με κάτι άλλο, δεν είναι ούτε μικρότερο, ούτε μεγαλύτερο. Στην περίπτωση αυτή ομιλούμε για ισότητα των δύο οντοτήτων.
Εάν η σύγκριση δεν οδηγεί σε ισότητα, θα οδηγεί σε ανισότητα. Στην κάθε ανισότητα διακρίνεται το μεγαλύτερο και το μικρότερο, τα οποία ονομάζονται αντίθετα το ένα προς το άλλο.
Συσχετίζοντας σε μία ανισότητα το μεγάλο ως προς το μικρό, οδηγούμεθα σε πέντε είδη της αποκαλούμενης μεγαλύτερης ανισότητος.
Αυτά τα πέντε είδη είναι:

1. το πολλαπλάσιο,
2. το επιμόριο,

3. το επιμερές,
4. το πολλαπλασιεπιμόριο και
5. το πολλαπλασιεπιμερές.

4.1 Πολλαπλάσιοι αριθμοί

Ο πολλαπλάσιος αριθμός είναι τέτοιος που, συγκρινόμενος με έναν άλλον, τον περιέχει περισσότερο από μια φορά.
Ονομασία: Διπλάσιος, τριπλάσιος, τετραπλάσιος κ.ο.κ.

4.2 Επιμόριοι αριθμοί

Όταν ένας αριθμός α εμπεριέχει ολόκληρο έναν άλλον μικρότερό του αριθμό β και επί πλέον ένα μόνον μέρος αυτού, τότε ο α ονομάζεται επιμόριος του β.

Δηλαδή $\alpha = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)\cdot\beta = \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)\cdot\beta \quad \alpha,\beta,\nu\in\mathrm{N} \ \ \& \ \alpha>\beta$

Η ονομασία των επιμορίων αριθμών επιτυγχάνεται με τη χρήση της προθέσεως **επί** και το τακτικό αριθμητικό του παρονομαστού του συμμετέχοντος μέρους του αριθμού.

Εάν $\nu=3$, τότε: απόλυτο αριθμητικό είναι το τρία (3), τακτικό αριθμητικό είναι τρίτος και ο επιμόριος αριθμός λέγεται επίτριτος $\left(1+\frac{1}{3}=\frac{3+1}{3}\right)$.

Εάν $\nu=4$, τότε: απόλυτο αριθμητικό είναι το τέσσερα (4), τακτικό αριθμητικό είναι τέταρτος και ο επιμόριος αριθμός λέγεται επιτέταρτος $\left(1+\frac{1}{4}=\frac{4+1}{4}\right)$.

Εάν $\nu=15$, τότε: απόλυτο αριθμητικό είναι το πεντεκαίδεκα (15), τακτικό αριθμητικό είναι πεντεκαιδέκατος και ο επιμόριος αριθμός λέγεται επιπεντεκαιδέκατος $\left(1+\frac{1}{15}=\frac{15+1}{15}\right)$

Ειδική περίπτωση ονοματολογίας επιμορίου αποτελεί η περίπτωση κατά την οποία $\nu=2$. Ο επιμόριος $\left(1+\frac{1}{2}=\frac{2+1}{2}\right)$ ονομάζεται Ημιόλιος (όλος και ήμισυς).

4.3 Επιμερείς αριθμοί

Αυτό το είδος αριθμών εμφανίζεται όταν ένας αριθμός α, συγκρινόμενος με άλλον μικρότερό του αριθμό β, τον περιέχει ολόκληρο και επί πλέον κάποια μέρη αυτού, όπως δύο ή τρία ή τέσσερα ή οποιοδήποτε άλλο μέρος μπορεί να προκύψει από τη σύγκριση.

Δηλαδή $\alpha = \left(1+\frac{\mu}{\mu+\nu}\right)\cdot\beta = \left(\frac{2\mu+\nu}{\mu+\nu}\right)\cdot\beta \quad \alpha,\beta,\mu,\nu\in\mathrm{N} \ \ \& \ \alpha>\beta$

Αυτή η κατάσταση ξεκινά από τα δύο τρίτα, δηλαδή $(\mu=2,\ \nu=1)$.

Εάν ένας αριθμός εμπεριέχει έναν άλλον αριθμό και επιπλέον δύο μέρη αυτού $\alpha = \left(1+\frac{2}{3}\right)\cdot\beta$, ονομάζεται επιδιμερής ή επιδίτριτος ή δισεπίτριτος.

Εάν ένας αριθμός εμπεριέχει έναν άλλον αριθμό και επιπλέον τρία μέρη αυτού $\alpha = \left(1+\frac{3}{4}\right)\cdot\beta$, ονομάζεται επιτριμερής ή επιτριτέταρτος ή τρισεπιτέταρτος.

Εάν ένας αριθμός εμπεριέχει έναν άλλον αριθμό και επιπλέον τέσσερα μέρη αυτού $\alpha = \left(1+\frac{4}{5}\right)\cdot\beta$, ονομάζεται επιτετραμερής ή επιτετράπεμπτος.

Στην περίπτωση κατά την οποία $(\nu>1)$, τότε είναι δυνατόν να εμφανισθούν περιπτώσεις ως: τρισεπίπεμπτος $\alpha = \left(1+\frac{3}{5}\right)\cdot\beta$.

4.4 Πολλαπλασιεπιμόριοι αριθμοί

Αυτό το είδος αριθμών εμφανίζεται όταν ένας αριθμός α, συγκρινόμενος με έναν άλλον μικρότερό του αριθμό β, περιέχει αυτόν περισσότερο από μία φορά και επί πλέον ένα μέρος αυτού, δηλαδή περιέχει το διπλάσιο ή το τριπλάσιο ή το τετραπλάσιο ή κάποιο άλλο πολλαπλάσιο αυτού κι επί πλέον ένα μέρος του, όπως το ήμισυ ή το ενα τρίτο ή το ένα τέταρτο ή κάποιο άλλο μέρος.

Δηλαδή $\alpha = \left(\mu+\frac{1}{\nu}\right)\cdot\beta = \left(\frac{\mu\nu+1}{\nu}\right)\cdot\beta \quad \alpha,\beta,\mu,\nu\in\mathrm{N} \;\; \& \; \alpha>\beta$

Ο αριθμός, επομένως, που περιέχει το διπλάσιο ενός άλλου αριθμού και το ένα δεύτερο αυτού ονομάζεται διπλασιεφήμισυς $\alpha = \left(2+\frac{1}{2}\right)\cdot\beta$.

Εκείνος που περιέχει το διπλάσιο και το ένα τρίτο, ονομάζεται διπλασιεπίτριτος $\alpha = \left(2+\frac{1}{3}\right)\cdot\beta$. Εκείνος που περιέχει το διπλάσιο και το ένα τέταρτο, ονομάζεται διπλασιεπιτέταρτος $\alpha = \left(2+\frac{1}{4}\right)\cdot\beta$ κ.ο.κ.

Επίσης, εάν ένας αριθμός περιέχει το όλον ενός άλλου αριθμού τρεις φορές και το μισό ή το ένα τρίτο ή το ένα τέταρτο αυτού, ονομάζεται τριπλασιεφήμισυς, τριπλασιεπίτριτος, τριπλασιεπιτέταρτος.
Κατά τον ίδιο τρόπο ονομάζονται και οι υπόλοιποι.

4.5 Πολλαπλασιεπιμερείς αριθμοί

Αυτό το είδος αριθμών εμφανίζεται, όταν ένας αριθμός α συγκρινόμενος με έναν άλλον μικρότερό του αριθμό β, περιέχει ολόκληρο τον αριθμό β περισσότερο από μία φορά, και δύο ή τρία ή οσαδήποτε άλλα μέρη αυτού, σύμφωνα με το είδος του επιμερούς αριθμού. Δηλαδή $\alpha = \left(\rho+\frac{\mu}{\mu+\nu}\right)\cdot\beta \quad \alpha,\beta,\mu,\nu,\rho\in\mathrm{N} \;\; \& \; \alpha>\beta$

Οι εν λόγω αριθμοί ονομάζονται ανάλογα με τα μέρη τους:

διπλασι(ο)επιδιμερής $\alpha = \left(2+\frac{2}{3}\right)\cdot\beta$, διπλασι(ο)επιτριμερής, διπλασι(ο)επιτετραμερής κ.ο.κ. Και πάλι, ονομάζονται τριπλασι(ο)επιδιμερής, τριπλασι(ο)επιτριμερής, τριπλασι(ο)επιτετραμερής $\alpha = \left(3+\frac{4}{5}\right)\cdot\beta$ κ.λπ.

Παράδειγμα: Η σχέση $8:3 = 2+\frac{2}{3}$ αποτελεί ένα διπλασιεπιδιμερή λόγο.

5. Θεμελιώδες Πυθαγόρειο αξίωμα για τη μουσική συμφωνία

Στο δεύτερο μισό της εισαγωγής της πραγματείας *«Κατατομή κανόνος»* αναφέρεται *το θεμελιώδες αξίωμα της Πυθαγορείου μουσικής θεωρίας* περί ευφωνίας ή συμφωνίας. Οι Πυθαγόρειοι εξέφραζαν τα μουσικά διαστήματα ως λόγους ακεραίων αριθμών, δηλαδή συσχέτιζαν έναν ακέραιο αριθμό με έναν άλλον.

πάντα δὲ τὰ ἐκ μορίων συγκείμενα ἀριθμοῦ
λόγῳ λέγεται πρὸς ἄλληλα, ὥστε καὶ τοὺς φθόγγους
ἀναγκαῖον ἐν ἀριθμοῦ λόγῳ λέγεσθαι πρὸς ἀλλήλους·
τῶν δὲ ἀριθμῶν οἱ μὲν ἐν πολλαπλασίῳ λόγῳ λέγονται,
οἱ δὲ ἐν ἐπιμορίῳ, οἱ δὲ ἐν ἐπιμερεῖ, ὥστε καὶ τοὺς
φθόγγους ἀναγκαῖον ἐν τοῖς τοιούτοις λόγοις λέγεσθαι
πρὸς ἀλλήλους. τούτων δὲ οἱ μὲν πολλαπλάσιοι καὶ ἐπι-
μόριοι ἑνὶ ὀνόματι λέγονται πρὸς ἀλλήλους.
Γινώσκομεν δὲ καὶ τῶν φθόγγων τοὺς μὲν συμφώ-
νους ὄντας, τοὺς δὲ διαφώνους, καὶ τοὺς μὲν συμφώνους
μίαν κρᾶσιν τὴν ἐξ ἀμφοῖν ποιοῦντας, τοὺς δὲ διαφώ-
νους οὔ. τούτων οὕτως ἐχόντων εἰκὸς τοὺς συμφώνους
φθόγγους, ἐπειδὴ μίαν τὴν ἐξ ἀμφοῖν ποιοῦνται κρᾶσιν
τῆς φωνῆς, εἶναι τῶν ἐν ἑνὶ ὀνόματι πρὸς ἀλλήλους
λεγομένων ἀριθμῶν, ἤτοι πολλαπλασίους ὄντας ἢ ἐπι-
μορίους.

[Νεοελληνική Απόδοση: Όλα όσα δε συνίστανται από τμήματα εκφράζονται μεταξύ τους με έναν αριθμητικό λόγο (=μια αριθμητική σχέση), ώστε είναι απαραίτητο και οι φθόγγοι με έναν αριθμητικό λόγο να εκφράζονται μεταξύ τους. Από τους αριθμούς άλλοι μεν σχετίζονται με λόγο πολλαπλάσιο, άλλοι δε με λόγο επιμόριο και άλλοι με λόγο επιμερή, ώστε είναι απαραίτητο και οι σχέσεις των φθόγγων να εκφράζονται με τέτοιου είδους λόγους. Από αυτούς τους λόγους οι πολλαπλάσιοι και οι επιμόριοι προφέρονται μονολεκτικά.

Επιπροσθέτως γνωρίζομε ότι από τους φθόγγους άλλοι μεν είναι σύμφωνοι, άλλοι δε διάφωνοι και οι μεν σύμφωνοι φθόγγοι μια συγχώνευση των δύο δημιουργούν, οι δε διάφωνοι όχι. Έτσι εχόντων των πραγμάτων (των σχετικών με τους φθόγγους), είναι φυσικό οι σύμφωνοι φθόγγοι, επειδή οι δύο τους δημιουργούν μία συγχώνευση της φω-

νής, να εκφράζονται με τους αριθμητικούς λόγους, που προφέρονται μονολεκτικά, δηλαδή αυτούς που είναι πολλαπλάσιοι ή επιμόριοι].

Ο συγγραφεύς συμπεραίνει ότι οι ήχοι –με την έννοια του δονουμένου τμήματος της χορδής- συνίστανται από «μόρια (=υποπολλαπλάσια τμήματα)», του όλου μήκους της χορδής. Ήχοι διαφορετικού μουσικού ύψους πρέπει τότε να είναι ικανοί να αλληλοσυσχετισθούν με αριθμητικούς λόγους, όπως ακριβώς συμβαίνει σε όλα τα πράγματα που συνίστανται από τμήματα.
Αμέσως μετά ο συγγραφεύς εισέρχεται στο θέμα των ευφώνων και των διαφώνων φθόγγων. Λέει ότι εύφωνοι είναι οι φθόγγοι τα στοιχεία των οποίων σχηματίζουν έναν ομοιογενή σύνθετο ήχο, κάτι που δεν συμβαίνει με τους διαφώνους φθόγγους.
Με ένα σ υ γ κ ε χ υ μ έ ν ο επιχείρημα ο συγγραφεύς εντάσσει τα εύφωνα διαστήματα στις δύο πρώτες κλάσεις λόγων, διότι έχουν μεταξύ τους κάτι το κοινό, που δεν το μοιράζονται με την τρίτη. Είναι η ασάφεια, η λακωνικότητα και η αδύναμη αποδεικτικότητα αυτής της παραγράφου που δημιουργεί υποψίες ότι αυτή η παράγραφος δεν στέκει σαν καρπός σκέψεως του λεπτολόγου συγγραφέως των Στοιχείων. Παρόλα αυτά η παράγραφος περιέχει το κυρίαρχο στοιχείο, την ουσία στην ανάλυση που ακολουθεί. Επί πλέον η απουσία της θα συνεπάγετο την κατάρρευση του μεθοδολογικού πλαισίου ολοκλήρου της πραγματείας.

Από τα πέντε αυτά είδη της μεγαλύτερης ανισότητος τα δύο τελευταία δεν μνημονεύονται καθόλου στην Ευκλείδειο πραγματεία *«Κατατομή κανόνος»*. Τα δύο πρώτα, όμως, με τη σειρά που τα αναφέρουμε, τα συνδέει ο Ευκλείδης, βάσει εμπειρικών πυθαγορείων παρατηρήσεων, με την *εύφωνία* ή *συμφωνία*.
Κατά την Πυθαγόρειο μουσική θεωρία τα μουσικά διαστήματα κατετάσσοντο σε δύο βασικές κατηγορίες τις *ευφωνίες* ή *συμφωνίες* και τις *διαφωνίες* ή *ασυμφωνίες*.
Πρέπει να σημειώσουμε ότι σύμφωνα με *το θεμελιώδες αξίωμα της Πυθαγορείου μουσικής θεωρίας* περί ευφωνίας ή συμφωνίας ΜΟΝΟ μία *πολλαπλάσια* ή *επιμόρια* σχέση μεταξύ των αριθμών των ενσαρκωτών της *ιεράς τετρακτύος* (1, 2, 3, 4) εκφράζει ένα σύμφωνο μουσικό διάστημα.
Αυτό συμβαίνει στα διαστήματα *δις διαπασών* $\left(\frac{4}{1}\right)$, *διαπασών* $\left(\frac{2}{1}\right)$, *ημιόλιον* $\left(\frac{3}{2}\right)$, *επίτριτον* $\left(\frac{4}{3}\right)$.
Έτσι, λοιπόν, σύμφωνα με το *θεμελιώδες αξίωμα της Πυθαγορείου μουσικής θεωρίας* περί ευφωνίας ή συμφωνίας το διάστημα του επογδόου τόνου $\left(\frac{9}{8}\right)$, παρόλο που αποτελεί μια επιμόρια σχέση, το κατέτασσαν στις διαφωνίες ή ασυμφωνίες, επειδή οι ακέραιοι αριθμοί 8 και 9, που το δομούν, δεν συγκαταλέγονται μεταξύ των αριθμών των ενσαρκωτών της *ιεράς τετρακτύος* (1, 2, 3, 4).
Στα σύμφωνα μουσικά διαστήματα συγκαταλέγοντο και τα σύνθετα των παραπάνω συμφώνων διαστημάτων με την οκτάβα. Έτσι, λοιπόν,

η δις διαπασών (=διαπασών+διαπασών) εκφράζεται με πολλαπλάσια σχέση $\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{1}=\frac{4}{1}\right)$ και εντάσσεται στα σύμφωνα διαστήματα,
η διαπασών και δια πέντε (=διαπασών+δια πέντε) εκφράζεται με πολλαπλάσια σχέση $\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{1}\right)$ και εντάσσεται στα σύμφωνα διαστήματα,
η διαπασών και δια τεσσάρων (=διαπασών+δια τεσσάρων) εκφράζεται με πολλαπλασιεπιμερή σχέση $\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{3}=2+\frac{2}{3}\right)$, παραβιάζει το *Θεμελιώδες Πυθαγόρειο αξίωμα για τη μουσική συμφωνία*, και γι' αυτό εντάσσεται στα διάφωνα ή ασύμφωνα διαστήματα.
Ο Κλαύδιος Πτολεμαίος επικυρώνει ότι *το θεμελιώδες αξίωμα της Πυθαγορείου μουσικής θεωρίας* περί ευφωνίας ή συμφωνίας, όπως ακριβώς το διατυπώσαμε παραπάνω, ήταν το κεντρικό δόγμα της Πυθαγορείου μουσικής ομολογίας πίστεως, επικρίνει τους Πυθαγορείους που περιορίζουν αυθαιρέτως την ευφωνία ή συμφωνία μόνο στους όρους της ιεράς τετρακτύος και διερωτάται γιατί οι Πυθαγόρειοι δεν εντάσσουν στα εύφωνα ή σύμφωνα διαστήματα τα μουσικά διαστήματα 5:4 ή 5:1. Επίσης τους κατηγορεί που εξαιρούν από τα εύφωνα ή σύμφωνα μουσικά διαστήματα το διάστημα της διαπασών και δια τεσσάρων, υποστηρίζοντας ότι η διαπασών δεν αλλοιώνει τον εύφωνο ή διάφωνο χαρακτήρα του μουσικού διαστήματος, στο οποίο προστίθεται. Από αυτήν την οπτική γωνία, λοιπόν, η διαπασών και δια τεσσάρων είναι ένα σύμφωνο μουσικό διάστημα.

Η έκφραση «Τῶν ἐν ἑνὶ ὀνόματι πρὸς ἀλλήλους λεγομένων ἀριθμῶν», η οποία υπάρχει στο τέλος του παρατεθέντος αποσπάσματος της εισαγωγής της πραγματείας *«Κατατομή κανόνος»*, ακόμη και σήμερα αποτελεί ένα άλυτο μυστήριο, το οποίο απασχόλησε και εξακολουθεί να απασχολεί αναρίθμητους μελετητές. Τι να εννοούσε άραγε ο Ευκλείδης με αυτήν τη φράση;
Στις αρχές του 20ου αιώνα οι Louis Laloy, Edward Lippman και Andrew Barker διετύπωσαν την άποψη ότι στην αρχαία εποχή μόνον οι πολλαπλάσιοι και οι επιμόριοι αριθμοί θα εξεφωνούντο μονολεκτικά, ενώ οι επιμερείς, οι πολλαπλασιεπιμόριοι και οι πολλαπλασιεπιμερείς αριθμοί θα εξεφωνούντο με περισσότερες της μιας λέξεις.
Αλλά αυτή η βολική άποψη ανατρέπεται από την ονοματολογία των πολλαπλασίων, των επιμορίων, των επιμερών, των πολλαπλασιεπιμορίων και των πολλαπλασιεπιμερών αριθμών, την οποία μας παραθέτει ο Νικόμαχος ο Γερασηνός στο έργο του «*Αριθμητική εισαγωγή*» και η οποία για όλους αυτούς τους αριθμούς είναι μονολεκτική, όπως δια παραδειγμάτων προανεφέρθη.
Ως αντίλογος υποστηρίζεται η άποψη ότι πράγματι στην αρχαία εποχή μόνον οι πολλαπλάσιοι και οι επιμόριοι αριθμοί εξεφωνούντο μονολεκτικά, ενώ οι επιμερείς, οι πολλαπλασιεπιμόριοι και οι πολλαπλασιεπιμερείς αριθμοί εξεφωνούντο με περισσότερες της μιας λέξεις και ότι ο Νικόμαχος ο Γερασηνός (50-120 μ.Χ.) επενόησε

κατά τη συγγραφή του έργου του «*Αριθμητική εισαγωγή*» τον μονολεκτικό τρόπο εκφωνήσεως όλων των πέντε ειδών αριθμών της καλουμένης *μεγαλύτερης ανισότητος*.

Π ρ ο σ ω π ι κ ώ ς τ ο ν π α ρ α π ά ν ω α ν τ ί λ ο γ ο δ ε ν τ ο ν α π ο δ έ χ ο μ α ι . Πιστεύω ακραδάντως ότι, εάν ο Νικόμαχος επινοούσε κάτι το διαφορετικό από τό ό,τι ήτο αποδεκτό από τους «παλαιούς» σε σχέση με την ονομασία και εκφώνηση των πέντε ειδών των αριθμών της καλουμένης μεγαλύτερης ανισότητος, αφενός μεν θα το εδήλωνε, κι αφετέρου θα παρέθετε και τον «παλαιό» τρόπο εκφωνήσεως του αριθμού δίπλα στο νεοεισαγόμενο δικό του τρόπο.

Υποστηρίζω την άποψη ότι και τα πέντε είδη των αριθμών της καλουμένης μεγαλύτερης ανισότητος εξεφωνούντο μονολεκτικώς, αλλά ο Ευκλείδης αποδέχεται μόνον τα δύο πρώτα είδη των αριθμών, διότι αυτά και μόνον αυτά οδηγούν σε αριθμητικές σχέσεις εκφρασμένες με τους ενσαρκωτές της ιεράς τετρακτύος (1, 2, 3, 4), οι οποίες υποδηλώνουν το σύμφωνον ή το διάφωνον ενός μουσικού διαστήματος.

Πράγματι, οι πολλαπλάσιοι αριθμοί $\frac{\alpha}{\beta}=n \;\; \gamma\iota\alpha \;\; n=1,2,3,4$ θεωρούνται από τους Πυθαγορείους ότι εκφράζουν εύφωνα ή σύμφωνα διαστήματα και συγκεκριμένα την ταυτοφωνία ή ομοφωνία, τη διαπασών, τη διαπασών και δια πέντε (διαπασών+δια πέντε) και τη δις διαπασών, αντίστοιχα.

Οι επιμόριοι αριθμοί $\frac{\alpha}{\beta}=1+\frac{1}{n} \;\; \gamma\iota\alpha \;\; n=1,2,3$ θεωρούνται από τους Πυθαγορείους ότι εκφράζουν τα εύφωνα ή σύμφωνα διαστήματα διαπασών $\left(\frac{2}{1}\right)$, δια πέντε ή ημιόλιον $\left(\frac{3}{2}\right)$, δια τεσσάρων ή επίτριτον $\left(\frac{4}{3}\right)$, αντίστοιχα.

Ο μικρότερος επιμερής αριθμός είναι ο $\frac{\alpha}{\beta}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$, που κατά τους Πυθαγορείους, αφού περιέχει τον αριθμό 5, ο οποίος ούτε είναι ένας από τους αριθμούς της ιεράς τετρακτύος, ούτε και είναι ένας «πυθαγόρειος» αριθμός, δεν μπορεί να εκφράζει εύφωνο ή σύμφωνο διάστημα.

Ο μικρότερος πολλαπλασιεπιμόριος αριθμός είναι ο $\frac{\alpha}{\beta}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$, που κατά τους Πυθαγορείους, αφού περιέχει τον αριθμό 5, για τους ίδιους λόγους δεν μπορεί να εκφράζει εύφωνο ή σύμφωνο διάστημα.

Ο μικρότερος πολλαπλασιεπιμερής αριθμός είναι ο $\frac{\alpha}{\beta}=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$, που κατά τους Πυθαγορείους, ναι μεν είναι «πυθαγόρειος» αριθμός, αφού $8=2^3\cdot 3^0$, αλλά δεν συμπίπτει με έναν από τους αριθμούς της ιεράς τετρακτύος, δεν μπορεί να εκφράζει εύφωνο ή σύμφωνο διάστημα.

Αφού, λοιπόν, οι μικρότεροι των επιμερών, των πολλαπλασιεπιμορίων και των πολλαπλασιεπιμερών αριθμών δεν είναι δυνατόν να εκφράζουν σύμφωνα μουσικά διαστήματα, κατά μείζονα λόγον κι όλοι οι αντίστοιχοι μεγαλύτεροί τους αριθμοί δεν μπορούν, κατά την άποψη των Πυθαγορείων, να εκφράζουν σύμφωνα μουσικά διαστήματα.

Για την κατανόηση των παραπάνω μη διαφεύγει της προσοχής μας ότι οι «κανονικοί», δηλαδή οι μουσικοί που χρησιμοποιούσαν τον κανόνα (=μονόχορδο) για ακουστικά πειράματα, στην αρχή χρησιμοποιούσαν τον αρχέγονο κανόνα, τον Πυθαγόρειο, που ηταν διηρημένος σε τέσσερα ίσα μέρη. Τούτο σημαίνει ότι ο κανών έφερε δεσμούς (=τάστα) με τις αριθμήσεις 1, 2, 3, 4 και υποστήριζε στη μουσική πράξη εύφωνα μουσικά διαστήματα εκφραζόμενα ΜΟΝΟ με σχέσεις μεταξύ των αριθμών της ιεράς τετρακτύος.

Σ’ αυτό συνηγορούν το Πυθαγόρειο πείραμα κατά Γαυδέντιον με τα δονούμενα τμήματα της χορδής του μονοχόρδου και η ρήση του Φιλολάου «ἁρμονίας δὲ μέγεθος συλλαβὰ καὶ δι' ὀξειᾶν» (Νικόμαχος, Εγχειρίδιον Αρμονικής, 9.1.14-15).